BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 517.977

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М.М.ЯГУБОВА
Бакинский Государственный Университет
Институт прикладной математики
yaqubov_mamed@mail.ru

В работе исследуются задачи оптимального управления для уравнения с частными производными третьего порядка. Выводится формула приращения функционала, из которой получается его дифференцируемость и приводятся различные необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: баротропный газ, формула приращения функционала, градиент.

При исследовании задач нестационарного поведения баротропного газа [1], возникает следующая задача оптимального управления: минимизировать функционал

$$I(u) = \int_Q \Phi(x,t,z,z_x,z_t,u)dxdt \qquad (1)$$

на решениях задачи

$$\beta z_{tt} + z_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} F_i(x,t,z_x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x,t,z_x) = f_1(x,t,u), \qquad (2)$$

$$z(x,0) = \varphi_1(x), \quad z_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad z\big|_{\Gamma} = 0, \qquad (3)$$

где $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset R^n$ - область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega \times (0,T)$, $z_x = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)$, T фиксированный момент времени, β - положительное постоянное, $u = (u_1,...,u_r)$ вектор управления, причем в качестве допустимых управлений берутся измеримые на Q вектор-функции $u = u(x,t)$, со значениями из ограниченного множества $U \in R^r$.

Целью работы является вывод формулы для градиента функционала (1) и доказательство необходимых условий оптимальности.

Прежде чем перейти к выводу формулы для градиента, на основе результатов из [2] приведем условия, обеспечивающие существование единственного решения начально-краевой задачи (2),(3) при заданном допустимом управлении $u = u(x,t)$.

1. $F_i(x,t,z_x),\ i = 1,2,...,n$ дважды непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам и

   а) $K_0 \sum_{i=1}^{n} \left(1+|\xi|^{p-2}\right)\xi_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} F_i(x,t,\xi)\xi_i \ \le K \sum_{i=1}^{n} \left(1+|\xi|^{p-2}\right)\xi_i^2$;

   б) $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_i}\eta_i\eta_j \ge K_0 \sum_{i=1}^{n} \left(1+|\xi|^{p-2}\right)\eta_i^2$; в) $\left|\frac{\partial F_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}\right| \le K\left(1+|\xi|^{p\ 2}\right)$;

   г) $\left|\frac{\partial F_i(x,t,\xi)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial F_i(x,t,\xi)}{\partial x_j}\right| + \left|F_i(x,t,\xi)\right| \le K\left(1+|\xi|^{p\ 1}\right)$ $i,\ j = \overline{1,n}$;

2. $A_i(x,t,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам и

   а) $\left|A_i(x,t,\xi)\right|^2 + \left|\frac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial x_i}\right|^2 \le C\left(1+|\xi|^{p}\right)$, б) $\left|\frac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}\right|^2 \le C\left(1+|\xi|^{p-2}\right)$,

   где K_0, K, C положительные постоянные, $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$, $p \ge 2$.

3. Функция $f_1(x,t,u)$ непрерывно дифференцируема по всем аргументам.

При выполнении этого условия ясно, что для каждого допустимого управления $u = u(x,t)$ функция $f_1(x,t,u(x,t))$ будет измеримой функцией. Ясно, что $f_1(x,t,u(x,t)) \in L_\infty(Q)$.

4. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ удовлетворяют условия:

$$\varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_{2p}(\Omega),\ \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\right|^{p-1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \in W_2^1(\Omega),\ \varphi_2 \in L_2(\Omega).$$

При выполнении приведенных условий для каждого допустимого управления начально-краевая задача (2),(3) имеет обобщенное решение, определение которого приведено в [2].

Относительно интегранта $\Phi(x,t,z,\xi,\eta,u)$ предполагается, что

5. $\Phi(x,t,z,\xi,\eta,u)$ дважды непрерывно дифференцируема по всем аргументам и $\left|\Phi(x,t,z,\xi,\eta,u)\right| \le a_0 + a_1\left(\ |z|^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)$, где a_0, a_1 некоторые положительные постоянные, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2$, $|\eta|^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + ... + \eta_n^2$.

Чтобы вывести формулу для градиента функционала (1) вычислим его приращение.

Пусть $u = u(x,t)$ и $\tilde{u} = u(x,t) + \Delta u(x,t)$ два допустимых управления, а $z = z(x,t)$ и $\tilde{z} = z(x,t) + \Delta z(x,t)$ соответствующие им решения задачи (2),(3). Тогда $\Delta z(x,t)$ будет решением задачи

$$\beta \Delta z_{tt} + \Delta z_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t}[F_i(x,t,z_x + \Delta z_x) - F_i(x,t,z_x)] -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(x,t,z_x + \Delta z_x) - A_i(x,t,z_x)] = f_1(x,t,u+\Delta u) -) f_1(x,t,u), \tag{4}$$

$$\Delta z(x,0) = 0, \quad \Delta z_t(x,0) = 0, \quad \Delta z\big|_{\Gamma} = 0. \tag{5}$$

Полагая $H(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u) = \Phi(x,t,z,z_x,z_t,u) + \psi f_1(x,t,u)$, приращение функционала можем записать в виде

$$I(u) = -\int_Q \Bigg\{ -\Delta H(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u) + \psi \Bigg[\beta \Delta z_{tt} + \Delta z_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t}\Big(F_i(x,t,z_x + \Delta z_x) -$$

$$- F_i(x,t,z_x)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(A_i(x,t,z_x + \Delta z_x) - A_i\,(x,t,z_x)\Big) \Bigg] \Bigg\} dxdt,$$

где $\Delta H \equiv H(x,t,z+\Delta z,\ z_x + \Delta z_x, z_t + \Delta z_t, \psi, u + \Delta u) - H(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u)$.

Легко доказать, что ΔH можно записать в виде

$$-\Delta H = -\Delta_u H - \frac{\partial H(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u)}{\partial z}\Delta z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u)}{\partial z_{x_j}} \cdot \frac{\partial \Delta z}{\partial x_j} -$$

$$- \frac{\partial H(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u)}{\partial z_t} \cdot \frac{\partial \Delta z}{\partial t} + R_1.$$

Аналогичным образом получаются равенства

$$F_i(x,t,z_x + \Delta z_x) - F_i(x,t,z_x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(x,t,z_z)}{\partial z_{x_j}} \cdot \frac{\partial \Delta z}{\partial x_j} + R_2,$$

$$A_i(x,t,z_x + \Delta z_x) - A_i(x,t,z_x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_i(x,t,z_z)}{\partial z_{x_j}} \cdot \frac{\partial \Delta z}{\partial x_j} + R_3,$$

Учитывая эти равенства, приращение функционала можно представить в виде

$$\Delta I(u) = -\int_Q \Bigg\{ -\Delta_u H(x,t,\psi,u) - \frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z}\Delta z - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z_{x_j}} \cdot \frac{\partial \Delta z}{\partial x_j} -$$

$$- \frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z_t} \cdot \frac{\partial \Delta z}{\partial t} + \beta\psi\Delta z_{tt} + \psi \cdot \Delta z_t - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \psi \frac{\partial^2}{\partial z_{x_i} \partial t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}} \frac{\partial \Delta Z}{\partial x_j} \right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\psi\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_i}{\partial z_{x_j}}\frac{\partial\Delta Z}{\partial x_j}\right)\Bigg\}dxdt+\int_Q(R_1+\psi R_2+\psi R_3)dxdt\,. \qquad (6)$$

Преобразуем некоторые слагаемые в первом интеграле.

Интегрируя по частям по t и учитывая условия (5), получим

$$-\int_Q\frac{\partial H(x,t,\psi)}{\partial z_t}\cdot\frac{\partial\Delta z}{\partial t}dxdt=-\int_\Omega\frac{\partial H(x,T,\psi)}{\partial z_t}\cdot\Delta z(x,T)dx+$$

$$+\int_Q\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H(x,t,\psi)}{\partial z_t}\right)\cdot\Delta z(x,t)dxdt\,,$$

$$\int_Q\psi\,\Delta z_t(x,t)dxdt=\int_\Omega\psi(x,T)\,\Delta z(x,T)dx-\int_Q\frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta z(x,t)dxdt\,,$$

$$\int_Q\beta\psi\,\Delta z_{tt}(x,t)dxdt=\beta\int_\Omega\psi(x,T)\,\Delta z_t(x,T)dx-\beta\int_\Omega\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}\Delta z(x,T)dx+$$

$$+\beta\int_Q\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\Delta z(x,t)dxdt\,.$$

Далее, применяя формулу Остроградского (один раз и два раза) и также, учитывая условие (5), имеем:

$$\int_Q\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H(x,t,\psi)}{\partial z_{x_j}}\quad\frac{\partial\Delta z(x,t)}{\partial x_j}dxdt=\sum_{j=1}^{n}\int_Q\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial H(x,t,\psi)}{\partial z_{xj}}\right)\quad\Delta z(x,t)dxdt\,\cdot$$

$$-\int_Q\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\psi\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_i}{\partial z_{x_j}}\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\right)dxdt=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_Q\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial z_{x_j}}\right)\Delta z(x,t)dxdt-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\psi\frac{\partial A_i}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega dt\,.$$

Ясно, что

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_Q\psi\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\right)dxdt=-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\int_0^T\psi(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\right)\right]dtdx$$

и применяя формулу интегрирования по частям получаем:

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\int_0^T\psi(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\right)\right]dtdx=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_Q\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\quad\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\right)dxdt-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\psi(x,T)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\bigg|_{t=T}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,T)}{\partial x_j}\right)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\psi(x,0)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\bigg|_{t=0}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,0)}{\partial x_j}\right)dx\,.$$

Преобразуем каждое слагаемое в правой части последнего равенства, применяя формулу Остроградского, с учетом условия (5):

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{Q}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\right)dxdt=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{Q}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\right)\Delta z(x,t)dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega dt\,,$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\psi(x,T)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\bigg|_{t=T}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,T)}{\partial x_j}\right)dx=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\right)\cdot\Delta z(x,T)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\cdot\Delta z(x,T)\cos(\nu,x_j)d\Omega-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\psi(x,T)\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,T)}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\psi(x,0)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i(x,0,z_x(x,0))}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,0)}{\partial x_j}\right)dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\psi(x,0)\frac{\partial F_i(x,0,z_x(x,0))}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,0)}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega\,.$$

Таким образом, получаем:

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\int_{0}^{T}\psi(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\right)dxdt=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{Q}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\right)\Delta z(x,t)dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\right)\cdot\Delta z(x,T)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\quad\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\quad\Delta z(x,T)\cos(\nu,x_j)d\Omega$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\psi(x,T)\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\quad\frac{\partial\Delta z(x,T)}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\psi(x,0)\frac{\partial F_i(x,0,z_x(x,0))}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,0)}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega\,.$$

Учитывая все эти выражения, формулу приращения (6) можем записать в виде

$$\Delta I(u)=-\int_Q\Delta_u H(x,t,\psi,u)dxdt-\int_Q\left\{\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}\cdot\frac{\partial F_i(x,t,z_x)}{\partial z_{x_j}}\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial A_i(x,t,z_x)}{\partial z_{x_j}}\right)-\frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z_{x_j}}\right)+$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z_t}\right)\right\}\cdot\Delta z(x,t)dxdt+\beta\int_{\Omega}\psi(x,T)\frac{\partial\Delta z(x,T)}{\partial t}dx+$$

$$+\int_{\Omega}\left\{\psi(x,T)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\right)-\right.$$

$$\left.-\beta\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}\quad\frac{\partial H(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_t}\right\}\Delta z(x,T)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}-\psi\frac{\partial A_i}{\partial z_{x_j}}\right]\frac{\partial\Delta z}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\psi(x,0)\frac{\partial F_i(x,0,z_x(x,0))}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,0)}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\Delta z(x,T)\cos(\nu,x_j)d\Omega-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\psi(x,T)\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,T)}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)d\Omega+$$

$$+\int\limits_Q (R_1+\psi R_2+\psi R_3)dxdt\,.$$

Выберем $\psi(x,t)$ как решение задачи

$$\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}\cdot\frac{\partial F_i(x,t,z_x)}{\partial z_{x_j}}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial A_i(x,t,z_x)}{\partial z_{x_j}}\right)-\frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z}+\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z_{x_j}}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z_t}\right)=0\,,\quad \psi(x,T)=0,\quad x\in\overline{\Omega}\,,$$

$$\beta\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}+\frac{\partial H(x,T,\psi,u)}{\partial z_t}+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\right)=0\,,$$

$$x\in\Omega\,,$$

$$\sum_{i=1}^n\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}\quad \psi\frac{\partial A_i}{\partial z_{x_j}}\quad \cos(\nu,x_i)=0\,,\ x\in\partial\Omega\,,\ t\in(0,T)\,,\ j=1,2,...,n\,; \qquad (7)$$

$$\psi(x,0)\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\ \frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\quad\frac{\partial F_i(x,t,z_x(x,T))}{\partial z_{x_j}}\quad\cos(\nu,x_j)=0\,,\quad x\in\partial\Omega\,.$$

Тогда формула приращения примет вид:

$$\Delta I(u)=-\int\limits_Q\Delta_u H(x,t,\psi,u)dxdt+\int\limits_Q(R_1+\psi R_2+\psi R_3)dxdt\,. \qquad (8)$$

Чтобы оценить второе слагаемое в (8), оценим $\|\Delta z\|^2_{L_2(Q)}$. Для этого уравнение (4) запишем в виде (с учетом (5)):

$$\beta\Delta z_t+\Delta z-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}[F_i(x,t,z_x(x,t)+\Delta z_x(x,t))-F_i(x,t,z_x(x,t))]-$$

$$-\sum_{i=1}^n\int_0^t\frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(x,\tau,z_x(x,\tau)+\Delta z_x(x,\tau))-A_i(x,\tau,z_x(x,\tau))]d\tau=$$

$$=\int_0^t[f_1(x,\tau,u+\Delta u)-f_1(x,\tau,u)]d\tau\,.$$

Умножая это уравнение на $\Delta z(x,t)$ и проинтегрируя по области $Q_t=[0,t]\times\Omega$, получим уравнение

$$\int_0^t\int_\Omega\beta\Delta z_t(x,\tau)\Delta z(x,\tau)dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega\Delta z^2(x,\tau)dxd\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega \Delta z(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}[F_i(x,\tau,z_x(x,\tau)+\Delta z_x(x,\tau))-F_i(x,\tau,z_x(x,\tau))]dxd\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega\int_0^\tau \Delta z(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(x,s,z_x(x,s)+\Delta z_x(x,s))-A_i(x,s,z_x(x,s))]dsdxd\tau=$$

$$=\int_0^t\int_\Omega\int_0^\tau \Delta z(x,\tau)[f_1(x,s,u+\Delta u)-f_1(x,s,u)]dsdxd\tau\,.$$

Так как $\beta\int_0^t\int_\Omega \Delta z_t(x,\tau)\Delta z(x,\tau)dxd\tau=\frac{\beta}{2}\int_\Omega(\Delta z(x,t))^2dx\,,$

то, сначала применяя формулу Остроградского, а далее формулу Лагранжа, будем иметь

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega \Delta z(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}[F_i(x,\tau,z_x(x,\tau)+\Delta z_x(x,\tau))-F_i(x,\tau,z_x(x,\tau))]dxd\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial\Delta z(x,\tau)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,\tau)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial F_i(x,\tau,z_x(x,\tau)+\theta_4^i\Delta z_x(x,\tau))}{\partial z_{x_j}}dxd\tau\,,$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega\int_0^\tau \Delta z(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(x,s,z_x(x,s)+\Delta z_x(x,s))-A_i(x,s,z_x(x,s))]dsd\tau dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\frac{\partial\Delta z(x,\tau)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,s)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial A_i(x,s,z_x(x,s)+\theta_5^i\Delta z_x(x,s))}{\partial z_{x_j}}dsd\tau dx\,.$$

Следовательно, последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\beta}{2}\int_\Omega(\Delta z(x,t))^2dx+\int_0^t\int_\Omega(\Delta z(x,\tau))^2dxd\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial\Delta z(x,\tau)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,\tau)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial F_i(x,\tau,z_x(x,\tau)+\theta_4^i\Delta z_x(x,\tau))}{\partial z_{x_j}}dxd\tau+$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\frac{\partial\Delta z(x,\tau)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Delta z(x,s)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial A_i(x,s,z_x(x,s)+\theta_5^i\Delta z_x(x,s))}{\partial z_{x_j}}dsd\tau dx=$$

$$=\int_0^t\int_\Omega\int_0^\tau \Delta z(x,\tau)[f_1(x,s,u+\Delta u)-f_1(x,s,u)]dsdxd\tau\,.$$

Рассматривая на это уравнение как линейное интегральное уравнение относительно $V(t)=\int_\Omega(\Delta z(x,t))^2dx$ и решая с учетом $V(0)=0$, получим

$$\int_\Omega (\Delta z(x,t))^2 dx = -\frac{2}{\beta}\int_0^t e^{-\frac{2}{\beta}(t-\tau)}[\Phi_1(\tau)+\Phi_2(\tau)+\Phi_3(\tau)]d\tau, \qquad (9)$$

где $\Phi_1(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \Delta z(x,t)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Delta z(x,t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial F_i(x,t,z_x(x,t)+\theta_4^i \Delta z_x(x,t))}{\partial z_{x_j}} dx$,

$$\Phi_2(\tau) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\partial \Delta z(x,\tau)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Delta z(x,s)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial A_i(x,s,z_x(x,s)+\theta_5^i \Delta z_x(x,s))}{\partial z_{x_j}} dxds,$$

$$\Phi_3(\tau) = \int_0^\tau \Delta z(x,\tau)\int_\Omega [f_1(x,s,u+\Delta u) - f_1(x,s,u)]dxds.$$

Оценим каждое слагаемое в (9).

Применяя неравенство о среднем значении легко показать, что

$$\left| -\frac{2}{\beta}\int_0^t e^{-\frac{2}{\beta}(t-\tau)} \Phi_1(\tau)d\tau \right| \le \frac{2M}{\beta}\int_0^t \left\| \frac{\partial \Delta z}{\partial x_i} \right\|^2 (\tau)d\tau; \left\| \frac{\partial \Delta z}{\partial x_i}\right\|^2 (\tau) =$$

$$= \int_\Omega \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Delta z(x,\tau)}{\partial x_j} \right)^2 dx;$$

$$\left| -\frac{2}{\beta}\int_0^t e^{-\frac{2}{\beta}(t-\tau)} \Phi_2(\tau)d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{M}{2\beta}\int_0^t \left[\tau \left\| \frac{\partial \Delta z}{\partial x} \right\|^2 (\tau) + \int_0^\tau \left\| \frac{\partial \Delta z}{\partial x} \right\|^2 (s)ds \right] d\tau = \frac{M}{2\beta}\int_0^t t \left\| \frac{\partial \Delta z}{\partial x} \right\|^2 (\tau)d\tau.$$

Учитывая, что $f_1(x,t,u)$ удовлетворяет условию Липшица по u, а также, применяя неравенство о среднем значении, будем иметь

$$\left| \frac{2}{\beta}\int_0^t e^{-\frac{2}{\beta}(t-\tau)} \Phi_3(\tau)d\tau \right| \le \frac{2}{\beta}\left| \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega \Delta z(x,\tau)[f_1(x,s,u+\Delta u) - f_1(x,s,u)dxdsd\tau \right| \le$$

$$\le \frac{2K}{\beta}\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\Delta z(x,\tau)| \cdot |\Delta u(x,s)| dxdsd\tau \le \frac{K}{\beta}\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega \left(|\Delta z(x,\tau)|^2 + |\Delta u(x,s)|^2 \right) dxdsd\tau =$$

$$= \frac{K}{\beta}\int_0^t \tau \int_\Omega \left(|\Delta z(x,\tau)|^2 dx \right) d\tau + \frac{K}{\beta}\int_0^t \left(\int_0^\tau \int_\Omega |\Delta u(x,s)|^2 dxds \right) d\tau,$$

где M, K положительные постоянные, не зависящие от t, Ω, $|\Delta u| = |\Delta u_1| + ... + |\Delta u_r|$.

Учитывая эти оценки в (9), получаем неравенство

$$\int_\Omega (\Delta z(x,t))^2 dx \le M_1 \int_0^T \left\| \frac{\partial \Delta z}{\partial x_i} \right\|^2 (\tau)d\tau + M_1 \int_0^T \left(\int_\Omega \Delta u(x,\tau)^2 dx \right) d\tau +$$

$$+M_1\int_0^t\left(\int_\Omega \left(\Delta z(x,\tau)\right)^2 dx\right)d\tau\,.$$

Применяя неравенство Гронуолла, отсюда получаем:

$$\int_\Omega (\Delta z(x,t))^2 dx \le M_1 e^{M_1 t}\left[\int_0^T\left|\frac{\partial \Delta z}{\partial x}\right|^2(\tau)d\tau+\int_0^T\left(\int_\Omega\left|\Delta u(x,\tau)\right|^2 dx\right)d\tau\right]. \qquad (10)$$

В силу [1], $\left|\frac{\partial \Delta z}{\partial x}\right|(t)\le K\int_\Omega\left|\Delta u(x,\tau)\right|^2 dx$, поэтому из (9) окончательно получаем

$$\int_\Omega (\Delta z(x,t))^2 dx \le K_1\int_0^T\int_\Omega\left|\Delta u(x,\tau)\right|^2 dx d\tau\,. \qquad (11)$$

Оценим теперь $\int_Q (R_1+\psi R_2+\psi R_3)dxdt$ с учетом того, что $\frac{\partial H}{\partial z}$, $\frac{\partial H}{\partial z_{x_j}}$, $\frac{\partial H}{\partial z_t}$, $\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}$, $\frac{\partial A_i}{\partial z_{x_j}}$, $j=1,2,...,n$ удовлетворяют условию Липшица.

Применяя неравенство Коши. после несложных преобразований получаем (с учетом, также, того, что $\psi(x,t)$ является решением линейной системы (7))

$$\int_Q\left|R_1(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u)\right|dxdt \le K_2\left(\|\Delta z\|^2+\|\Delta z_t\|^2+\|\Delta z_x\|^2+\|\Delta u\|^2\right), \qquad (12)$$

$$\int_Q\left|\psi(x,t)R_2(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u)\right|dxdt \le M_1\left\|\frac{\partial \Delta z}{\partial x}\right\|^2 \le M_2\|\Delta u\|^2,$$

$$\int_Q\left|\psi(x,t)R_3(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u)\right|dxdt \le M_1\left\|\frac{\partial \Delta z}{\partial x}\right\|^2 \le M_2\|\Delta u\|^2.$$

Учитывая эти оценки, окончательно получаем

$$\left|\int_Q (R_1+\psi R_2+\psi R_3)dxdt\right| \le K\cdot\|\Delta u\|^2. \qquad (13)$$

На основе этой оценки из (8) получаем, что функционал (1) дифференцируем по Гато в $L_2(Q)$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1-5. Тогда функционал (1), определенный на решениях начально-краевой задачи (2),(3) дифференцируем по Гато в $L_2(Q)$ и

$$gradI(u)=-H_u(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u),$$

где $\psi(x,t)$ - решение задачи (7).

Используя оценку (13), можно получить различные необходимые условия оптимальности.

Теорема 2. Пусть $u^0(x,t)$ оптимальное управление, а $z^0(x,t)$ соответствующее ему решение задачи (2), (3) и $(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0, t^0) = (x^0, t^0) \in Q$ регулярная точка $u^0(x,t)$. Тогда существует такое решение $\psi^0(x,t)$ задачи (7), что почти при всех $(x,t) \in Q$

$$H(x,t,z^0(x,t), z_x^0(x,t), z_t^0(x,t), \psi^0(x,t), u^0(x,t)) =$$
$$= \max_{u \in U} H(x,t,z^0(x,t), z_x^0(x,t), z_t^0(x,t), \psi^0(x,t), u). \quad (14)$$

Для доказательства выберем $\alpha > 0$ таким, чтобы $(n+1)$-мерный параллелепипед

$$\Pi_\alpha = \{x_i^0 - \sqrt[n+1]{\alpha} \le x_i \le x_i^0 + \sqrt[n+1]{\alpha},\ t^0 - \sqrt[n+1]{\alpha} \le t \le t^0 + \sqrt[n+1]{\alpha},\ i = 1,2,...,n\}$$

содержался в Q и положим

$$\Delta u = \begin{cases} 0, \ \textit{при} \quad (x,t) \in Q \setminus \Pi_\alpha, \\ v - u^0(x,t) \ \textit{при} \ (x,t) \in \Pi_\alpha, \end{cases}$$

где v - произвольная точка из U.

При таком определении Δu из равенства (8), в силу (13), получаем равенство

$$\Delta I(u) = -\int_{\Pi_\alpha} \Delta u H(x,t,\psi,u) dxdt + o(\alpha), \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0,$$

из которого, известными рассуждениями, получается доказательство теоремы 2.

В случае, когда U выпуклое множество можно получить необходимое условие оптимальности в виде интегрального неравенства, а если функционал также выпуклый, то и достаточное условие оптимальности. Для доказательства соответствующих теорем отметим, что, так как функционал $I(u)$ дифференцируем, то

$$\Delta I(u) = -\int_{\Pi_\alpha} H_u(x,t), \Delta u) dxdt + o\left(\| \Delta u \|\right), \quad (15)$$

где $H_u(x,t) = H_u \Big|(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u) \Big|_{\substack{u=u^0(x,t) \\ z=z^0(x,t) \\ \psi=\psi^0(x,t)}}$.

Имеет место

Теорема 3. (Интегральное условие оптимальности) Пусть выполняются условия теоремы 1 и U выпуклое множество. Если $u^0(x,t)$ оптимальное управление, то для любого допустимого управления $u(x,t)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Pi_\alpha}(H_u(x,t),u(x,t)-u^0(x,t))dxdt \ge 0\,. \tag{16}$$

На основе неравенства (16) доказывается

Теорема 4. Для оптимальности управления $u^0(x,t)$ необходимо, чтобы

$$\min_{u\in U}\int_Q (H_u(x,t),u-u^0(x,t))dxdt = 0\,. \tag{17}$$

Теорема 5. (Достаточное условие оптимальности). Пусть U выпуклое множество, $I(u)$ выпуклый функционал и выполняются условия 1-5 теоремы 1. Для оптимальности управления $u^0(x,t)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\min_{u\in U}\int_Q (H_u(x,t),u-u^0(x,t))dxdt = 0\,.$$

Необходимость следует из теоремы 4.

В силу известной теоремы, (см., например, [4]), для выпуклости дифференцируемого функционала необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$I(u_\lambda)-I(u^0) \ge (gradI(u^0),u_\lambda-u^0) = \int_Q (H_u(x,t),u(x,t)-u^0(x,t))dxdt\,,$$

$$u_\lambda(x,t) = u^0(x,t)+\lambda\left(u-u^0(x,t)\right),\ u\in U$$

Тогда из (15) следует, что $r(\lambda)=o(\lambda)\ge 0$ и значит

$$\lim_{\lambda\to 0+}\frac{I(u_\lambda)-I(u^0)}{\lambda} \ge \int_Q (H_u(x,t),u(x,t)-u^0(x,t))dxdt \ge$$

$$\ge \min_{u\in U}\int_Q (H_u(x,t),u(x,t)-u^0(x,t))dxdt = 0\,.$$

Следовательно, $I(u_\lambda)-I(u^0)\ge 0$, которое означает, что $u^0(x,t)$ оптимальное управление. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А.И. Смешанная задача для одного класса уравнений неклассического типа // Дифференциальные уравнения, 1979, т.XV, №2, с.272-280.
2. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа // Наука: Сибирское отделение, Новосибирск, 1983, 267с.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002, 818 с.
4. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972, 415 с.

ÜÇTƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ TƏNLİKLƏ TƏSVİR OLUNAN PROSESLƏRDƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİ

M.M.YAQUBOVA

XÜLASƏ

Üçtərtibli xüsusi törəməli tənliklə təsvir olunan proseslərdə funksionalın artımı üçün düstur çıxarılıb, buradan da onun diferensiallanan olması alınır və optimallıq üçün müxtəlif zəruri şərtlər verilib.

Açar sözlər: barotrop qazı, funksionalın artımı düsturu, qradiyent.

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS IN THE PROCESSES DESCRIBED BY PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

M.M.YAGUBOVA

SUMMARY

In the processes described by differential equations of the third order there has been derived a formula for the increment of the functional, which proves its differentiability and provides various necessary optimality conditions.

Key words: barotropic gas, increment of the functional formula, gradient.

Поступила в редакцию: 18.05.2015 г.
Подписано к печати: 18.06.2015 г.